Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Саратовский государственный технический университет

имени Гагарина Ю.А.»

Институт электронной техники и приборостроения

Кафедра Информационная безопасность автоматизированных систем

Специальность 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Практическая работа № 3

Тема «Решение краевой задачи методом прогонки»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил: студент 3 курса  учебной группы с-ИБС32  очной формы обучения  Солодилов В.В.  Проверил: доцент кафедры ИБС Кожанова Е.Р. |

Саратов 2021

Целью данной работы является формирование практических навыков решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения методом прогонки с их программной реализацией.

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**

*Краевая задача (граничная задача)* – задача о нахождении решения заданного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего [краевым (граничным) условиям](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%8F) в концах интервала или на границе области.

Одним из методов приближенного решения краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка является *метод прогонки.*

Постановка задачи. Требуется найти функцию , которая является решением следующей краевой задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

Задачу (1), (2) называют краевой, поскольку дополнительные условия (2) задаются на концах отрезка

Разностная аппроксимация производных. Введем на отрезке равномерную сетку Записывая уравнение (1) во внутренних узлах сетки получим -но уравнение для определения неизвестных

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

где

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно , необходимо первые и вторые проивзодные функции в узловых точках выразить через значения в этих точках. Будем предполагать, что функция имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Выразим значения по формуле Тейлора, беря точку в качестве точки разложения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Отсюда можно получить следующие выражения для точного значения первой производной функции в точке

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

а также выражение для точного значения второй производной функции в той же точке

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Отношения

в формуле (5) называются правой разностной производной, левой разностной проиводной и центральной разностной производной, соответственно. Отношение

в (6) называется второй разностной производной.

Из формулы (5) следует, что левая и правая разностные производные аппроксимируют производную с первым порядком точности относительно шага а центральная разностная производная – со вторым порядком точности относительно Из (6) следует, что вторая разностная производная аппроксимирует производную со вторым порядком точности.

Решение задачи методом прогонки. Пусть – приближенное значение, соответствующее точному значению функции в точке Заменим второй разностной производной и первой центральной разностной производной:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

соответственно, подставляя в них вместо величины . В результате вместо дифференциальной задачи (1), (2) получим следующую разностную задачу:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |
|  | (9) |

Подставляя краевые условия (9) в (8), получим относительно значений систему линейных алгебраических уравнений *(n-1)*-го порядка с трёхдиагональной матрицей.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Система (10) решается методом прогонки. Запишем систему в виде

где

Введем дополнительные переменные

Чтобы сделать схему вычислений однородной, положим Тогда Кроме того,

Тогда решение системы определяется формулой